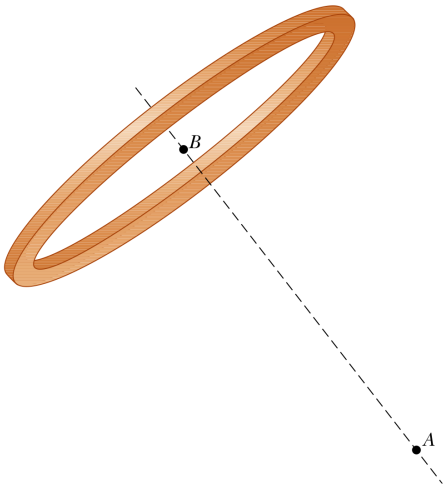
1) Cálculo da gravidade gerada por um anel, sobre o eixo perpendicular à sua área delimitada, passando pelo centro de simetria.

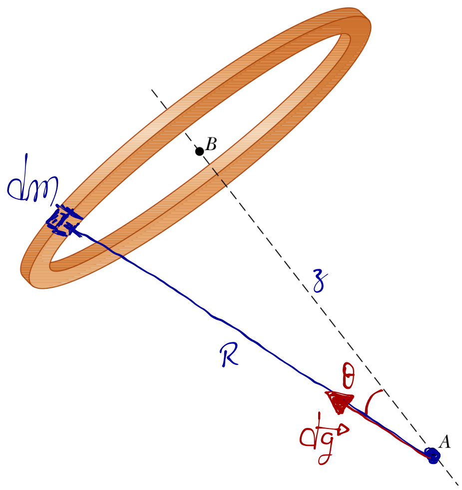
Dados:

Massa do anel $\equiv M = 2{,}36 \times 10^{20}$ kg "Uniformemente distribuída"

Raio $\equiv r = 1{,}00 \times 10^{8}$ m , a uma distância $z = 2{,}00 \times 10^{8}$ m

Obs: Obter a gravidade no ponto $\underline{A}$.

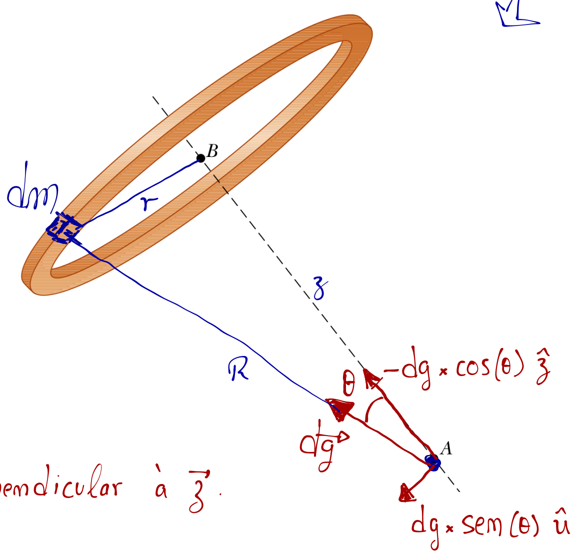




$\Rightarrow$ O elemento de massa dm é responsável por uma gravidade $d\vec{g}$;

$$d\vec{g} = -\frac{G\,dm}{r^2}\,\hat{r}$$

Note que o vetor $d\vec{g}$ possui componentes paralela e perpendicular à z.



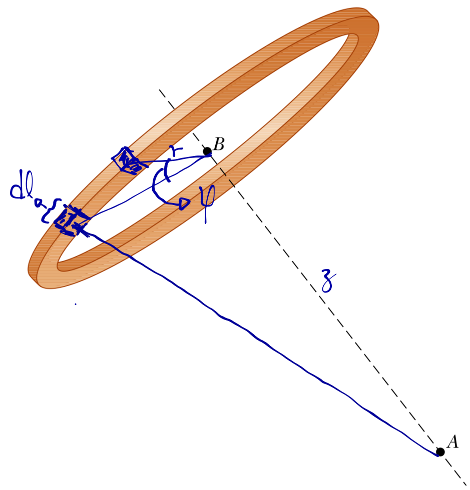
Obs: O unitário $\hat{u}$ é um vetor qualquer perpendicular à $\vec{z}$.

A gravidade total resulta de uma soma sobre todas as contribuições. Desta forma, as componentes perpendiculares de $d\vec{g}$ $(dg \times sen(\theta)\,\hat{u})$ se cancelam aos pares. Isto significa que podemos somar apenas as contribuições na direção z.

$$\Rightarrow \quad d\vec{g}_{//} = -\frac{G\,dm}{R^2}\cos(\theta)\,\hat{z}$$

$$\vec{g} = \int d\vec{g}_{//} = \int -\frac{G\,dm}{R^2}\cos(\theta)\,\hat{z}$$

Mas $dm = \lambda\, dl$, onde dl = elemento de comprimento do anel tal que



$$dl = r\,d\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \int_0^{2\pi} -\frac{G\cos(\theta)\,\lambda\, r\, d\varphi}{R^2}\,\hat{z}$$

"Observe que a única variável é φ."

$$\Rightarrow \vec{g} = -\frac{G\cos(\theta)\,\lambda r \times 2\pi}{R^2}\,\hat{z}$$

Mas $\lambda \times 2\pi r = M$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM\cos(\theta)}{R^2}\,\hat{z}}$$

Para os dados fornecidos: $R^2 = r^2 + z^2$ e $\cos(\theta) = \frac{z}{R} = \frac{2{,}00 \times 10^8}{\left[(1{,}00^2 + 2{,}00^2) \times 10^{16}\right]^{1/2}}$

$$\vec{g} = -\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 2{,}36 \times 10^{20}}{(1{,}00^2 + 2{,}00^2) \times 10^{16}} \times \frac{2{,}00 \times \cancel{10^8}}{\sqrt{5} \times \cancel{10^8}}\,\hat{z}$$

$$\vec{g} = -\frac{6{,}67 \times 2{,}36 \times 2{,}00}{5 \times \sqrt{5}} \times 10^{-7}\,\hat{z}$$

$$\vec{g} = -2{,}8 \times 10^{-7}\ m/s^2\,\hat{z}$$

Qual seria a energia Potencial neste ponto?

"Importante o estudante refletir: Mas o que é potencial gravitacional?"

Quando aplicamos a equação $V = -\frac{GM}{r}$, em um ponto $\underline{r}$ distante do centro de massa de $\underline{M}$, estamos calculando a variação de energia do sistema composto por $\underline{M}$ e uma unidade de massa (um kg no SI), durante o processo de aproximação de $\underline{\text{um kg}}$ desde o infinito até a distância $\underline{r}$.

O que estamos calculando quando subtraímos $V(r_f) - V(r_i)$ (r_f e r_i em alusão a um ponto final e um ponto inicial, respectivamente). ?

$\Longrightarrow$ $V(r)$ representa, na verdade, $V(r) - V(\infty)$. Mas $V(\infty) \equiv cte$.

Portanto, $V(r_f)$ é $V(r_f) - V(\infty) = V(r_f) - cte$

e $V(r_i)$ é $V(r_i) - V(\infty) = V(r_i) - cte$.

Quando fazemos $V(r_f) - V(r_i)$, estamos fazendo, na verdade,

$$\left(V(r_f) - cte\right) - \left(V(r_i) - cte\right) = V(r_f) \cancel{- cte} - V(r_i) \cancel{+ cte} = V(r_f) - V(r_i)$$

Em palavras, representa o trabalho que "alguém" deve realizar para deslocar $\underline{\text{um kg}}$ deste $r = \infty$ até r_f, menos o trabalho para deslocar desde o infinito até r_i.

Mas isso equivale ao trabalho (energia gasta) realizado por "alguém" para deslocar $\underline{\text{um kg}}$ desde r_i até r_f; o que equivale à variação do potencial gravitacional do sistema $M | kg$.

Então, quando falamos em $\Delta V = V(r_f) - V(r_i)$ estamos falando sobre a variação do potencial gravitacional devido ao deslocamento de $\underline{\text{um kg}}$ de $r_i \longrightarrow r_f$. Obs: Potencial $\leadsto$ associado a uma unidade de massa.

⟶ Para considerarmos a energia potencial associada a um objeto de massa $\underline{m}$ qualquer, não necessariamente de uma unidade, basta multiplicarmos $\underline{m}$ por $\underset{\sim}{V}$.

⟶ $U = mV$.

Ainda relativo ao problema anterior, vamos imaginar que um objeto de massa $\underline{m}$ seja abandonado do ponto $\underline{A}$ e vamos obter a velocidade com a que o objeto chega ao ponto $\underline{B}$.

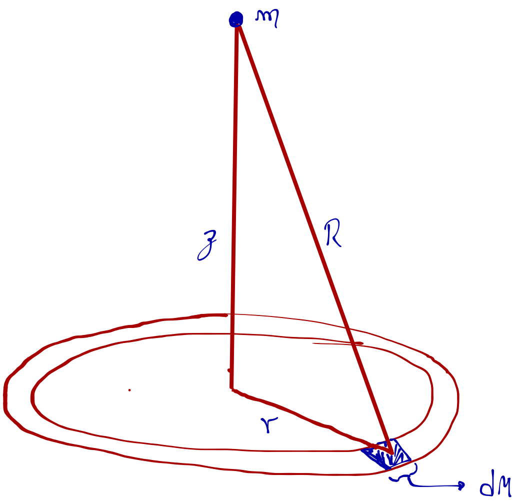
⇒ Utilizemos o princípio de conservação da energia;

$$\Delta E_c = -\Delta U$$

"Um aumento na energia potencial está relacionado com um decréscimo na energia cinética, e vice-versa.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = U_B - U_A$$

Mas qual é a expressão para o potencial elétrico no caso do anel?



Note que todos os pedaços dM estão a uma mesma distância $\underline{R}$ de $\underline{m}$ e, portanto, colaboram com uma fração dU idêntica para a energia potencial U

$$\rightarrow dU = -\frac{G\,dM\,m}{R}$$

⟶ Se cada dM colabora com a mes intensidade, então o anel completo produz um potencial como se toda sua massa estivesse concentrada em um ponto distante R de m, portanto:

$$U = -\frac{GMm}{R}$$

→ Colocando em função de z e r:

$$R^2 = r^2 + z^2$$

$$R = (r^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad U(r) = -\frac{GMm}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

Obs: No caso da energia potencial, não temos que considerar projeções, direções e sentidos. Lembre: Energia não é vetor.

Voltando ao problema:

$$\rightarrow \quad U_B - U_A = -GMm\left[\frac{1}{(r^2+z_B^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2+z_A^2)^{1/2}}\right]$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{v_A} \xrightarrow{} v_A = 0 \quad = -\left\{-GM\cancel{m}\left[\frac{1}{(r^2+z_B^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2+z_A^2)^{1/2}}\right]\right\}$$

$$v_B^2 = 2GM\left[\frac{1}{(r^2+z_B^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2+z_A^2)^{1/2}}\right]$$

Para o caso com z_B = zero "centro do anel"

$$v_B = \sqrt{2GM\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2+z_A^2}}\right]}$$

Resta introduzir valores e realizar os cálculos.

$$\square \Delta\nabla \square$$